Devoir sur Table 1

Durée : 4h

1. Les exercices sont indépendants. Ils peuvent être traités dans un ordre quelconque.
2. Tous les documents sur papier sont interdits.
3. Les calculatrices ne sont pas autorisées.
4. Le matériel de géométrie (règle, compas, équerre) est autorisé.
5. La notation des copies tiendra compte dans une large mesure de la qualité de la rédaction. Ceci implique que vous devez faire des raisonnements clairs, concis et complets, utiliser un langage mathématiques adapté et précis, être lisible et éviter les fautes d'orthographe et de grammaire.
6. Si, au cours du devoir, vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, vous le signalez sur votre copie et poursuivez sa composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre.
7. Mettez en évidence vous résultats en les encadrant ou les soulignant.
8. Conformément au règlement de la Banque PT
   — Composer lisiblement sur les copies avec un stylo à bille à encre foncée : bleue ou noire.
   — L'usage de stylo à friction, stylo plume, stylo feutre, liquide de correction et dérouleur de ruban correcteur est interdit.

Exercice 1

(*E.P.I.T.A. PT 2018*)

Dans cet exercice, on étudie par deux méthodes la nature de la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$, et pour tout entier $n \geqslant 1$, on introduit la somme partielle :

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

1. *Question préliminaire*
   Étudier la monotonie de la suite $(H_n)_{n \geqslant 1}$.
   En déduire que cette suite admet une limite finie L ou bien diverge vers $+\infty$.
2. *Première méthode*
   (a) Etablir l'inégalité suivante pour tout entier $n \geqslant 1$:
   $$H_{2n} - H_n \geqslant \frac{1}{2}$$
   (b) En déduire que la suite $(H_n)_{n \geqslant 1}$ diverge vers $+\infty$.
3. *Deuxième méthode*
   (a) Vérifier l'inégalité suivante pour tout entier $k \geqslant 1$:
   $$\frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{k}$$
   (b) En déduire l'inégalité suivante pour tout entier $n \geqslant 1$:
   $$H_n - 1 \leqslant \ln(n) \leqslant H_n - \frac{1}{n}$$
   En déduire l'inégalité $\ln(n) \leqslant H_n \leqslant \ln(n) + 1$.
   (c) Établir la divergence de $(H_n)_{n \geqslant 1}$ vers $+\infty$ et montrer que $H_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \ln(n)$.

(d) Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $\gamma_n = H_n - \ln(n)$.
Étudier le signe de l'expression $\gamma_n - \gamma_{n-1}$ pour tout entier $n \geqslant 2$ et montrer que $0 \leqslant \gamma_n \leqslant 1$.
En déduire la convergence de la suite $(\gamma_n)_{n\geqslant 1}$ vers un réel γ appartenant à $[0,1]$ et la formule :

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$$

Exercice 2

(Adapté de Banque PT 2021)

On étudie le processus de fonctionnement d'un appareil utilisé chaque jour dans une usine et susceptible de subir des pannes accidentelles. On fait les hypothèses suivantes :

— Le comportement de l'appareil au jour $n+1$ ne dépend que de son état au jour n et pas des jours précédents.

— Si l'appareil fonctionne le jour n, il a une probabilité α d'être en panne le jour $n+1$.

— Si l'appareil est en panne au jour n, il a une probabilité β d'être réparé et de fonctionner le jour $n+1$.

— On a $0 < \alpha < 1$ et $\beta > 0$.
Formellement, si l'on appelle X_n la variable aléatoire qui vaut 1 si l'appareil fonctionne le jour n et 0 si l'appareil est en panne au jour n, on a :

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = 0 | X_n = 1) = \alpha,$$

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = 1 | X_n = 0) = \beta.$$

1. On note $p_n = \mathbb{P}(X_n = 1)$.
   (a) Calculer p_2 en fonction de p_1.
   (b) Plus généralement, montrer que, pour tout $n \geqslant 1$,
   $$p_{n+1} = \beta + (1 - \alpha - \beta)p_n.$$
   (c) En déduire une expression de p_n en fonction de p_1.
   (d) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$.
2. On suppose maintenant que l'appareil est en fonctionnement le premier jour. On note N le numéro du jour où cet appareil tombe en panne pour la première fois. Montrer que $N-1$ suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre.

Exercice 3

(Mines d'Albi, Alès, Douai et Nantes 2008)

Dans tout ce problème, n désigne un entier non-nul, a et b sont deux nombres réels.

La notation $\mathbb{R}_n[X]$ désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ et ayant un degré inférieur ou égal à n.

Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$ on pose

$$\varphi_n(P) = (X-a)(X-b)P' - n\left(X - \frac{a+b}{2}\right)P$$

Partie I — Étude de φ_1

Dans tout cette partie, on suppose que $n = 1$. On pose donc :

$$\forall P \in \mathbb{R}_1[X], \qquad \varphi_1(P) = (X-a)(X-b)P' - \left(X - \frac{a+b}{2}\right)P$$

1. Démontrer que φ_1 est un endomorphisme de $\mathbb{R}_1[X]$.

2. Soit $\mathcal{B}_1 = (1, X)$ la base canonique de $\mathbb{R}_1[X]$. Déterminer $M_1 = \text{Mat}_{\mathcal{B}_1}(\varphi_1)$.
3. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $a$et b pour que φ_1 zoit bijective.
4. On suppose, dans cette question seulement que $a \neq b$
   (a) Démontrer que la famille $\mathcal{B} = (X - a, X - b)$ est une base de $\mathbb{R}_1[X]$
   (b) Calculer $\varphi_1(X - a)$ et $\varphi_1(X - b)$ puis déduire $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi_1)$
   (c) Déterminer la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}_1$, notée $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}_1}$. Déterminer de même la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_1$ à la base $\mathcal{B}$, notée $P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}}$.
   (d) Donner, sans démonstration, une égalité reliant les matrices $M, M_1, P_{\mathcal{B},\mathcal{B}_1}$ et $P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}}$.
   (e) Soit $p \in \mathbb{N}$. Calculer M^p puis en déduire, grâce à la question 4.(d), une expression de M_1^p (on donnera l'expression de chacun des coefficients de cette matrice).
5. On s'intéresse dans cette question à l'ensemble $\Gamma = \{\alpha I_2 + \beta M + \gamma M_1^2 + \delta M_1^3 \ , \ (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4\}$.
   (a) Démontrer que Γ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   (b) Prouver que les matrices M_1^2 et M_1^3 sont des combinaisons linéaires de M_1 et I_2
   (c) Déterminer une base de Γ.
6. On suppose dans cette question que $a = 4$ et $b = 2$. En utilisant les résultats de la question 5.(b), déterminer l'application φ_1^2. En déduire la nature de φ_1 et préciser ses éléments caractéristiques (on donnera une base de chacun des deux sous-espaces vectoriels concernés).

Partie II — Quelques généralités sur φ_n

7. Démontrer que φ_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
8. On se propose dans cette question de déterminer $\text{Ker}(\varphi_n)$. On pose $\alpha = \max(a, b)$ et on considère l'intervalle $I =]\alpha, +\infty[$.
   (a) Démontrer que la fonction $f : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{2x - (a + b)}{x^2 - (a + b)x + ab} \end{array}$ est continue sur I.
   (b) Déterminer une primitive F de la fonction f sur I.
   (c) Résoudre sur l'intervalle I l'équation différentielle
   $$(E) : \qquad y' - \frac{nx - n\frac{a+b}{2}}{(x - a)(x - b)} y = 0$$
   (d) On suppose que n est pair et on écrit $n = 2p$ avec $p \in \mathbb{N}^*$. Déduire de la question 8.(c) une base de l'espace vectoriel $\text{Ker}(\varphi_{2p})$.
   (e) On suppose maintenant que n est impair et on écrit $n = 2p + 1$avec $p \in \mathbb{N}$. Déduire de la question 8.(c) une base de l'espace vectoriel $\text{Ker}(\varphi_{2p+1})$ (On pourra discuter suivant les valeurs de a et b).

Exercice 4
(Adapté de Ecricome S 2015)

1. On note pour tout $x \in I = \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$:
   $$f(x) = \frac{1}{3}(2\sin(x) + \tan(x)) \qquad \text{et} \qquad g(x) = \frac{3\sin(x)}{2 + \cos(x)}.$$
   (a) Factoriser le polynôme $P(X) = 2X^3 - 3X^2 + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$.
   (b) On pose $u(x) = f(x) - x$ pour tout $x \in I$.
   Justifier que u est dérivable sur I et que pour tout $x \in I$, $u'(x) = \dfrac{P(\cos(x))}{3\cos^2(x)}$.
   (c) En déduire les variations de u sur I.
   (d) On pose $v(x) = x - g(x)$ pour tout $x \in I$.
   Justifier qu'il existe un polynôme Q de $\mathbb{R}[X]$, de degré deux, tel que pour tout $x \in I$, $v'(x) = \dfrac{Q(\cos(x))}{(2 + \cos x)^2}$.

(e) En déduire les variations de v sur I.

(f) Montrer que :

$$\forall x \in I,\ g(x) < x < f(x).$$

2. (a) En utilisant le fait que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$, calculer $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

(b) Déduire de la question 1.(f) un encadrement de π.

3. On pose pour tout entier naturel n,

$$a_n = \sin\left(\frac{\pi}{3 \times 2^n}\right) \quad \text{et} \quad b_n = \cos\left(\frac{\pi}{3 \times 2^n}\right).$$

(a) Justifier que pour tout réel θ,

$$\cos(2\theta) = 1 - 2\sin^2(\theta),$$

et en déduire que pour tout entier naturel n,

$$a_{n+1} = \sqrt{\frac{1 - b_n}{2}} \quad (*) \qquad \text{et} \quad b_{n+1} = \sqrt{\frac{1 + b_n}{2}} \quad (**)$$

(b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$9 \times 2^n \frac{a_n}{2 + b_n} < \pi < 2^n \left(2a_n + \frac{a_n}{b_n}\right).$$

(c) Justifier que les deux termes de l'encadrement précédent tendent vers π quand n tend vers l'infini.

Corrigé

Corrigé de l'exercice 1

1. Par télescopage on a, pour $n \in \mathbb{N}$

$$H_{n+1} - H_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} > 0$$

Ainsi $\boxed{\text{la suite } (H_n)_{n\geqslant 1} \text{ est strictement croissante.}}$
D'après le théorème de la limite monotone, on en déduit que
$\boxed{(H_n)_{n\geqslant 1} \text{ admet une limite finie } L \text{ ou bien diverge vers } +\infty.}$

2. *Première méthode*

(a) Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $H_{2n} - H_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$. Or, pour tout $k \in [\![n+1, 2n]\!]$, $\dfrac{1}{k} \geqslant \dfrac{1}{2n}$.

D'où

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

Ainsi $\boxed{H_{2n} - H_n \geqslant \frac{1}{2}}$

(b) Supposons, par l'absurde que la suite $(H_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers $L \in \mathbb{R}$, alors $\lim H_{2n} = L$ et $\lim H_n = L$. Par addition des limites, il vient $\lim (H_{2n} - H_n) = 0$, ce qui contredit le résultat précédent.

On en déduit que $\boxed{(H_n)_{n\geqslant 1} \text{ diverge vers } +\infty.}$

3. *Deuxième méthode*

(a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Pour $t \in [k, k+1]$, on a $\dfrac{1}{k+1} \leqslant \dfrac{1}{t} \leqslant \dfrac{1}{k}$, donc, par croissance de l'intégrale, il vient

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{k+1}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{k}$$

C'est-à-dire $\boxed{\frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \frac{1}{k}.}$

(b) D'après la question précédente, on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad \frac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k}$$

Ainsi, en sommant ces inégalités pour k allant de 1 à $n-1$ on obtient

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

C'est-à-dire, par télescopage

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leqslant \ln(n) \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

Un décalage d'indice dans la première somme nous donne

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \ln(n) \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

On a donc bien $\boxed{H_n - 1 \leqslant \ln(n) \leqslant H_n - \frac{1}{n}}$

D'après l'inégalité précédente, on a, d'une part, $H_n \leqslant \ln(n)+1$ et, d'autre part, $H_n \geqslant \ln(n) + \frac{1}{n} \geqslant \ln(n)$.

Finalement on a bien $\boxed{\ln(n) \leqslant H_n \leqslant \ln(n)+1.}$

(c) Tout d'abord, $\lim \ln(n) = +\infty$, donc par comparaison, $\boxed{\lim H_n = +\infty.}$
D'après la question précédente on a, pour tout $n \geqslant 2$

$$1 \leqslant \frac{H_n}{\ln(n)} \leqslant 1 + \frac{1}{\ln(n)}$$

Comme $\lim \left(1+\frac{1}{\ln(n)}\right) = 1$, le théorème des gendarmes nous assure que $\lim \frac{H_n}{\ln(n)} = 1$ et ainsi $\boxed{H_n \sim \ln(n)}$.

(d) Soit $n \geqslant 2$, on a

$$\begin{aligned}\gamma_n - \gamma_{n-1} &= H_n - \ln(n) - H_{n-1} + \ln(n-1)\\ &= \frac{1}{n} + \ln\left(\frac{n-1}{n}\right)\\ &= \frac{1}{n} + \ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

On sait que, pour tout $x > -1$, $\ln(1+x) \leqslant x$

Inégalité
Il suffit d'étudier la fonction $x \mapsto x - \ln(1+x)$

D'où, pour $n \geqslant 2$, $\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) \leqslant -\frac{1}{n}$ i.e. $\frac{1}{n} + \ln\left(1-\frac{1}{n}\right) \leqslant 0$

Finalement, pour tout $n \geqslant 2$, $\boxed{\gamma_n - \gamma_{n-1} \leqslant 0.}$

On a montré plus tôt que $\ln(n) \leqslant H_n$, on en déduit donc que $\gamma_n \geqslant 0$. De même on a vu que $H_n - 1 \leqslant \ln(n)$,ce qui montre que $\gamma_n \leqslant 1$.
Ainsi, pour tout $n \geqslant 2$, $\boxed{0 \leqslant \gamma_n \leqslant 1.}$

La suite $(\gamma_n)_{n\geqslant 1}$ et décroissante et minorée par 0, donc $\boxed{\text{elle converge vers un réel } \gamma \text{ appartenant à } [0,1].}$
Ainsi $\gamma_n - \gamma$ tend vers 0 et on peut écrire $\gamma_n - \gamma \underset{n\to+\infty}{=} o(1)$ c'est-à-dire $H_n - \ln(n) - \gamma \underset{n\to+\infty}{=} o(1)$ ou encore :

$$\boxed{H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)}$$

Corrigé de l'exercice 2

1. (a) — 1-er cas. On suppose $0 < p_1 < 1$. Alors la famille $(\{X_1 = 1\}, \{X_1 = 0\})$ est un système complet d'évènements et la formule des probabilités totales entraine :

$$\begin{aligned}p_2 &= \mathbb{P}(X_2 = 1)\\ &= \mathbb{P}(X_2 = 1 | X_1 = 1)\,\mathbb{P}(X_1 = 1) + \mathbb{P}(X_2 = 1 | X_1 = 0)\,\mathbb{P}(X_1 = 0)\\ &= (1 - \mathbb{P}(X_2 = 0 | X_1 = 1))\,p_1 + \beta\,(1-p_1)\\ &= (1-\alpha)p_1 + \beta\,(1-p_1)\\ &= \beta + (1-\alpha-\beta)p_1\end{aligned}$$

— 2-ème cas. On suppose $p_1 = 1$. Alors

$$p_2 = \mathbb{P}(X_2 = 1) = \mathbb{P}(X_2 = 1 | X_1 = 1)\,\mathbb{P}(X_1 = 1) = 1 - \alpha = \beta + (1-\alpha-\beta)p_1$$

— 3-ème cas. On suppose $p_1 = 0$. Alors

$$p_2 = \mathbb{P}(X_2 = 1) = \mathbb{P}(X_2 = 1 | X_1 = 0)\,\mathbb{P}(X_1 = 0) = \beta = \beta + (1-\alpha-\beta)p_1.$$

Finalement dans tous les cas, on obtient $\boxed{p_2 = \beta + (1-\alpha-\beta)p_1}$.

(b) En remplaçant X_1 par X_n, X_2 par X_{n+1}, p_1 par p_n et p_2 par p_{n+1}, le raisonnement précédent nous donne

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p_{n+1} = \beta + (1-\alpha-\beta)p_n.}$$

(c) Posons $q = 1-\alpha-\beta$. Alors la suite $(p_n)_{n\geqslant 1}$ vérifie

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad p_{n+1} = qp_n + \beta$$

la suite $(p_n)_{n\geqslant 1}$ donc est arithmético-géométrique.

Puisque $q \neq 1$ il existe un unique réel r tel que $r = qr + \beta$, il s'agit de $r = \dfrac{\beta}{\alpha+\beta}$. On a alors, pour $n \geqslant 1$,

$$\begin{cases} p_{n+1} & = qp_n + \beta \\ r = qr + \beta \end{cases}$$

D'où, en considérant $L_1 - L_2$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad p_{n+1} - r = q(p_n - r)$$

La suite $(p_n - r)_{n\geqslant 1}$ est géométrique de raison q. On en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad p_n - \ell = q^{n-1}(p_1 - \ell)$$

puis

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad p_n = \frac{\beta}{\alpha+\beta} + (1-\alpha-\beta)^{n-1}\left(p_1 - \frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)}$$

(d) On sait que $0 < \alpha < 1$ et $0 < \beta \leqslant 1$, ainsi $0 < \alpha+\beta < 2$ et $-1 < \alpha+\beta-1 < 1$
Par conséquent $\lim\limits_{n\to+\infty}(1-\alpha-\beta)^{n-1} = 0$ ainsi

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} p_n = \frac{\beta}{\alpha+\beta}}$$

2. Déterminons la loi de N.
Par définition, $N = \inf\{n \in \mathbb{N}^* : X_n = 0\}$ donc N est à valeurs dans $N^* \cup \{+\infty\}$.
Puisque l'appareil est en fonctionnement le premier jour, X_1 vaut 1 presque sûrement et $\mathbb{P}(N=1) = 0$.
Pour $n \geqslant 2$, il vient par la formule des probabilités composées

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N=n) &= \mathbb{P}(X_1 = 1, \dots, X_{n-1} = 1, X_n = 0) \\ &= \mathbb{P}(X_1 = 1)\cdot\mathbb{P}(X_2 = 1|X_1 = 1)\cdots\mathbb{P}(X_{n-1} = 1|X_1 = 1, \dots, X_{n-2} = 1)\cdot\mathbb{P}(X_n = 0|X_1 = 1, \dots, X_{n-1} = 1).\end{aligned}$$

Conditionnellement à $X_1 = 1, \dots, X_{j-1} = 1$ le comportement de l'appareil au jour j ne dépend que de son état au jour $j-1$, en d'autres termes

$$\forall j \in [2, n-1], \quad \mathbb{P}(X_j = 1|X_1 = 1, \dots, X_{j-1} = 1) = \mathbb{P}(X_j = 1|X_{j-1} = 1) = 1-\alpha$$

et

$$\mathbb{P}(X_n = 0|X_1 = 1, \dots, X_{n-1} = 1) = \mathbb{P}(X_n = 0|X_{n-1} = 1) = \alpha$$

Par conséquent

$$\forall n \geqslant 2, \qquad \mathbb{P}(N=n) = (1-\alpha)^{n-2}\alpha$$

Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \mathbb{P}(N-1=n) = \mathbb{P}(N=n+1) = (1-\alpha)^{n-1}\alpha$$

On reconnait ici une loi géométrique, $\boxed{N-1 \text{ suit la loi géométrique de paramètre } \alpha,\ \mathscr{G}(\alpha).}$

Corrigé de l'exercice 3

Partie I — Étude de φ_1

1. Soit $(P,Q) \in \mathbb{R}_1[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$\begin{aligned}\varphi_1(P+\lambda Q) &= (X-a)(X-b)(P+\lambda Q)' - \left(X - \frac{a+b}{2}\right)(P+\lambda Q)\\ &= (X-a)(X-b)(P'+\lambda Q') - \left(X - \frac{a+b}{2}\right)(P+\lambda Q)\\ &= (X-a)(X-b)P' + -\left(X-\frac{a+b}{2}\right)P + \lambda\left((X-a)(X-b)Q' - \left(X-\frac{a+b}{2}\right)Q\right)\\ &= \varphi_1(P) + \lambda\varphi_1(Q)\end{aligned}$$

Soit $P = cX + d \in \mathbb{R}_1[X]$, alors

$$\varphi_1(P) = (X-a)(X-b)c - \left(X - \frac{a+b}{2}\right)(cX+d) = \left(\frac{c(a+b)}{2} - d\right)X + \frac{bd}{2} + \frac{ad}{2} + abc \in \mathbb{R}_1[X]$$

Finalement on a bien $\boxed{\varphi_1 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_1[X]).}$

2. On a

$$\varphi_1(1) = \frac{a+b}{2} - X \qquad \text{et} \qquad \varphi_1(X) = ab + \left(-\frac{a+b}{2}\right)X$$

Ainsi

$$\boxed{M_1 = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(\varphi_1) = \begin{pmatrix} \frac{a+b}{2} & ab \\ -1 & -\frac{a+b}{2}\end{pmatrix}}$$

3. φ_1 est bijective si et seulement si M_1 est inversible donc si et seulement si $\det(M_1) \neq 0$.
On a

$$\det(M_1) = -\frac{1}{4}(a+b)^2 + ab = -\frac{a^2+2ab+b^2-4ab}{4} = -\frac{(a-b)^2}{4}$$

Ainsi $\det(M_1) \neq 0$ si et seulement si $a \neq b$ et donc
$\boxed{\varphi_1 \text{ est bijective si et seulement si } a \neq b.}$

4. (a) On va montrer que c'est une famille libre.
Soit $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\lambda(X-a) + \mu(X-b) = 0$.
En évaluant cette égalité en en a il vient $\mu(a-b) = 0$ donc, puisque $a \neq b$, $\mu = 0$. De même, en évaluant en b, il vient $\lambda(b-a) = 0$ donc $\lambda = 0$.
$((X-a),(X-b))$ est alors une famille libre de deux vecteurs dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_1[X]$ qui est de dimension 2. Ainsi $\boxed{((X-a),(X-b)) \text{ est une base de } \mathbb{R}_1[X].}$

   (b) On trouve après calcul,

$$\varphi_1(X-a) = \frac{a-b}{2}(X-a), \qquad \varphi_1(X-b) = \frac{b-a}{2}(X-b)$$

   D'où

$$M = \mathrm{Mat}_B(\varphi_1) = \frac{b-a}{2}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

   (c) On rappelle que la matrice de passage $P_{B_1,\mathcal{B}}$ de B_1 à B s'obtient en rangeant en colonnes les coordonnées des vecteurs de B dans la base B_1, ainsi

$$\boxed{P_{B_1,\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}-a & -b\\ 1 & 1\end{pmatrix}}$$

   De plus $P_{B_1,B_1} = P^{-1}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}}$ d'où, après calcul

$$\boxed{P_{B_B,\mathcal{B}_1} = \frac{1}{a-b}\begin{pmatrix}-1 & -b\\ 1 & a\end{pmatrix}}$$

(d) Il s'agit de la formule de changement de base

$$\boxed{M = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}_1} M_1 P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}}}$$

(e) M étant diagonale ses puissances se calculent aisément matrices diagonales, on a

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}, \qquad M^p = \left(\frac{b-a}{2}\right)^p \begin{pmatrix} (-1)^p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

On alors $M_1^p = P_{\mathcal{B}_1,B^B} M^p P_B, \mathcal{B}_1$ ce qui donne après calcul

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}, \qquad M_1^p = \frac{(b-a)^{p-1}}{2^p} \begin{pmatrix} b+(-1)^{p+1}a & (1-(-1)^p)\,ab \\ (-1)^p - 1 & (-1)^p b - a \end{pmatrix}}$$

5. (a) On a $\Gamma = \text{Vect}\left(I_2, M_1, M_1^2, M_1^3\right)$ ce qui montre que $\boxed{\Gamma \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$ en tant que sous-espace vectoriel engendré par une famille.

(b) On trouve après calcul

$$M_1^2 = \frac{(a-b)^2}{4} I_2 \qquad M_1^3 = M_1^2 M_1 = \frac{(a-b)^2}{4} M_1$$

Ainsi $\boxed{M_1^2, M_1^3 \in \text{Vect}\,(I_2, M_1).}$

(c) (I_2, M_1) est une famille de deux vecteurs qui ne sont pas colinéaires, c'est donc une famille libre. Par ailleurs, puisque $\Gamma = \text{Vect}\,(I_2, M_1)$, (I_2, M_1) est une famille génératrice de Γ.

Ainsi $\boxed{(I_2, M_1) \text{ est une base de } \Gamma.}$

6. On a $M_1^2 = I_2$ ainsi $\boxed{\varphi_1^2 = \text{Id}_{\mathbb{R}_1[X]}}$.

On en déduit que $\boxed{\varphi_1 \text{ est une symétrie.}}$

Cherchons ses éléments caractéristiques : on va pour cela résoudre les équations $M_1X = X$ et $M_1X = -X$. On a

$$\begin{aligned} M_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\iff \begin{cases} 3x + 8y &= x \\ -x - 3y &= y \end{cases} \\ &\iff x = -4y \\ &\iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} M_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\iff \begin{cases} 3x + 8y &= -x \\ -x - 3y &= -y \end{cases} \\ &\iff x = -2y \\ &\iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

Finalement $\boxed{\varphi_1 \text{ est la symétrie par rapport à Vect}(-4+X) \text{ parallèlement à la direction Vect}(-2+X).}$

Partie II — Quelques généralités sur φ_n

7. Soit $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$\begin{aligned} \varphi_n(P + \lambda Q) &= (X-a)(X-b)(P+\lambda Q)' - n\left(X - \frac{a+b}{2}\right)(P + \lambda Q) \\ &= (X-a)(X-b)(P' + \lambda Q') - n\left(X - \frac{a+b}{2}\right)(P + \lambda Q) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= (X-a)(X-b)P' + -n\left(X - \frac{a+b}{2}\right)P + \lambda\left((X-a)(X-b)Q' - n\left(X-\frac{a+b}{2}\right)Q\right)\\ &= \varphi_n(P) + \lambda\varphi_n(Q)\end{aligned}$$

Soit $P = cX^n + Q \in \mathbb{R}_n[X]$ avec c le coefficient de degré n de P et $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Alors $\varphi_n(P) = c\varphi_n(X^n) + \varphi_n(Q)$.
On a

$$\varphi_n(X^n) = -n\frac{a+b}{2}X^n + abnX^(n-1) \in \mathbb{R}_n[X]$$

et $\varphi_n(Q) = (X-a)(X-b)Q' - n\left(X - \frac{a+b}{2}\right)Q$. Puisque $\deg(Q) \leqslant n-1$ alors $\deg((X-a)(X-b)Q') \leqslant n$ et $\deg(n\left(X-\frac{a+b}{2}\right)Q) \leqslant n$, d'où $\deg(\varphi_n(Q)) \leqslant n$.
Ainsi $\varphi_n(P) \in \mathbb{R}_n[X]$
Finalement $\boxed{\varphi_n \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_n[X].}$

8. (a) f est le quotient de deux fonctions polynomiales (donc continues) est continue sur I si et seulement si son dénominateur ne s'annule pas sur I. Or les racines du dénominateur sont a et b donc ce dénominateur ne s'annule pas sur I. Ainsi $\boxed{f \text{ est continue sur } I.}$

(b) f est de la forme $\frac{u'}{u}$, une primitive de f est donc $F = \ln(|u|)$. Ici cela donne , puisque, pour $x \in I$, $x^2 - (a+b)x + ab = (x-a)(x-b) \geqslant 0$,

$$\boxed{\begin{array}{cccc} F & : & I & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \ln((x-a)(x-b)) \end{array}}$$

(c) L'équation différentielle (E) peut se réécrire $y' - \frac{n}{2}fy = 0$
Ses solutions sont donc de la forme $y : x \mapsto K\exp\left(\frac{n}{2}F(x)\right)$ où $K \in \mathbb{R}$.
L'ensemble des solutions de E est donc

$$\boxed{\left\{x \mapsto K((x-a)(x-b))^{\frac{n}{2}}\ ,\ K \in \mathbb{R}\right\}}$$

(d) Remarquons que, si P vérifie $\varphi_n(P) = 0$ alors P est une solution de (E) sur I.
Ainsi, si $P \in \operatorname{Ker}(\varphi_n)$ alors, il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in I$, $P(x) = K((x-a)(x-b))^p$.
Les polynômes P et $((X-a)(X-b))^p$ coïncident sur l'intervalle I qui est un ensemble infini, ils sont donc égaux.
On en déduit que $\operatorname{Ker}(\varphi_n) \subset \operatorname{Vect}(((X-a)(X-b))^p)$.
On a également

$$\begin{aligned}\varphi_{2p}(((X-a)(X-b))^p) &= (X-a)(X-b)p\left((X-a)^p(X-b)^{p-1} + (X-a)^{p-1}(X-b)^p\right)\\ &\quad - 2p\left(X - \frac{a+b}{2}\right)((X-a)(X-b))^p\\ &= p((X-a)+(X-b))((X-a)(X-b))^p\\ &\quad - p(2X-a-b)(((X-a)(X-b))^p)\\ &= 0\end{aligned}$$

D'où $\operatorname{Vect}(((X-a)(X-b))^p) \subset \operatorname{Ker}(\varphi_n)$.
Finalement

$$\boxed{\operatorname{Ker}(\varphi_n) = \operatorname{Vect}(((X-a)(X-b))^p)}$$

> **Égalité de polynômes**
> Si deux polynômes P et Q coïncident sur un ensemble infini alors le polynôme $P-Q$ admet une infinité de racines et donc le polynôme nul. Ainsi $P = Q$

(e) En reprenant le raisonnement précédent, on constate que, si $P \in \operatorname{Ker}(\varphi_n)$ il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in I$, $P(x) = K((x-a)(x-b))^{\frac{2p+1}{2}}$.
Or la fonction $x \mapsto K((x-a)(x-b))^{\frac{2p+1}{2}}$ est une fonction polynomiale sur I si et seulement si $K = 0$ ou bien $a = b$.

Ainsi

$$\text{Ker}\,(\varphi_n) \subset \text{Vect}((X-a)^{2p+1}) \text{ si } a=b \quad \text{et} \ \text{Ker}\,(\varphi_n) \subset \{0_{\mathbb{R}[X]}\} \text{ sinon}$$

On a clairement $0_{\mathbb{R}[X]} \in \text{Ker}\,(\varphi_n)$ et, dans le cas $a=b$, un simple calcul nous permet de vérifier que $(X-a)^{2p+1} \in \text{Ker}\,(\varphi_n)$.

Finalement

$$\boxed{\text{Ker}\,(\varphi_n) = \begin{cases} \text{Vect}((X-a)^{2p+1}) & \text{si } a=b \\ \{0_{\mathbb{R}[X]}\} & \text{sinon} \end{cases}}$$

Corrigé de l'exercice 4

1. (a) On a $P = 2X^3 - 3X^2 + 1 = (X-1)(2X^2 - X - 1) = (X-1)(X-1)(2X+1)$ d'où $\boxed{P(X) = (X-1)^2(2X+1).}$

   (b) u est une somme de trois fonctions dérivables sur I, $\boxed{\text{elle est donc dérivable sur } I}$, et

   $$\forall x \in I, \qquad u'(x) = \frac{1}{3}\left(2\cos(x) + \frac{1}{\cos^2(x)}\right) - 1 = \frac{1}{3}\left(\frac{2\cos^3(x) + 1 - 3\cos^2(x)}{\cos^2(x)}\right)$$

   Ainsi

   $$\boxed{\forall x \in I, u'(x) = \frac{P(\cos(x))}{3\cos^2(x)}}$$

   (c) $u'(x)$ est du signe de $P(\cos(x)) = (\cos(x)-1)^2(2\cos(x)+1)$. Ainsi $u'(x)$ est du signe de $2\cos(x)+1$,

   Or, pour tout $x \in I$, on a $1 > \cos(x) > 0 > \dfrac{-1}{2}$ donc, pour tout $x \in I$ $P(\cos x) > 0$, et par suite $u' > 0$ sur I.

   Ainsi $\boxed{u \text{ est strictement croissante sur } I.}$

   (d) Notons que g est dérivable sur I car quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas. v est alors dérivable sur I comme différence de fonctions dérivables. Pour $x \in I$, on a

   $$g'(x) = \frac{3\cos x \times (2+\cos x) - 3\sin x \times (-\sin x)}{(2+\cos x)^2} = \frac{6\cos x + 3}{(2+\cos x)^2}$$

   D'où

   $$v'(x) = 1 - g'(x) = \frac{(2+\cos x)^2 - 6\cos x - 3}{(2+\cos x)^2} = \frac{\cos^2 x - 2\cos x + 1}{(2+\cos x)^2}$$

   Finalement, pour tout $x \in I$ on a $\boxed{v'(x) = \dfrac{Q(\cos x)}{(2+\cos x)^2} \text{ où } Q = X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2.}$

   (e) Q est positif et ne s'annule qu'en 1, et, sur I, cos ne prend jamais la valeur 1, donc v' est strictement positive sur I.

   Ainsi $\boxed{v \text{ est strictement croissante sur } I.}$

   (f) u et v sont strictement croissante et vérifient

   $$\lim_{x\to 0} u(x) = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0} v(x) = 0$$

   Ainsi

   $$\forall x \in I, \qquad u(x) > 0, \qquad v(x) > 0$$

   Ou encore

   $$\forall x \in I, \qquad f(x) > x, \qquad x > g(x)$$

   On en déduit que

   $$\boxed{\forall x \in I, \qquad g(x) < x < f(x)}$$

2. (a) On a

$$\begin{aligned}
\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)\\
&= \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\\
&= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}
\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}
\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)\\
&= \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\\
&= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}\\
&= \frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2}{6-2}\\
&= \frac{8-2\sqrt{12}}{4}\\
&= 2-\sqrt{3}
\end{aligned}$$

Finalement

$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \qquad \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \qquad \tan\left(\frac{\pi}{12}\right)=2-\sqrt{3}}$$

(b) On a

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \frac{2\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)+\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)}{3}\\
&= \frac{2\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}+2-\sqrt{3}}{3}\\
&= \frac{4+\sqrt{6}-2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{6}
\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}
g\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \frac{3\sin(\left(\frac{\pi}{12}\right)}{2+\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)}\\
&= \frac{3\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}{2+\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}\\
&= \frac{3\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{8+\sqrt{6}+\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\frac{3\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{8+\sqrt{6}+\sqrt{2}} < \frac{\pi}{12} < \frac{4+\sqrt{6}-2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{6}$$

Et donc

$$\boxed{36\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{8+\sqrt{6}+\sqrt{2}} < \pi < 8+2\sqrt{6}-4\sqrt{3}-2\sqrt{2}}$$

Numériquement

Un calcul numérique donne $3.14151 < \pi < 3,1424$

3. (a) Soit θ un réel, on a

$$\cos(2\theta) = \cos(\theta+\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) = 1 - 2\sin^2(\theta)$$

Ainsi

$$\boxed{\forall \theta \in \mathbb{R}, \qquad \cos(2\theta) = 1 - 2\sin^2(\theta)}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On va prendre $\theta = \dfrac{\pi}{3 \times 2^{n+1}} \in \left[0, \dfrac{\pi}{6}\right[$).
On a alors $a_{n+1} = \sin(\theta) > 0$ et $b_{n+1} = \cos(\theta) > 0$.
Ainsi

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{1-b_n}{2}} &= \sqrt{\frac{1-\cos(2\theta)}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{2\sin^2(\theta)}{2}} \\ &= |\sin(\theta)| \\ &= \sin(\theta) \\ &= a_{n+1}\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{1+b_n}{2}} &= \sqrt{\frac{1+\cos(2\theta)}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{2(1-\sin^2(\theta))}{2}} \\ &= |\cos(\theta)| \\ &= \cos(\theta) \\ &= b_{n+1}\end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a_{n+1} = \sqrt{\frac{1-b_n}{2}} \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \sqrt{\frac{1+b_n}{2}}}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\theta = \dfrac{\pi}{3 \times 2^n} \in \left[0, \dfrac{\pi}{6}\right]$).
En appliquant la résultat de la question 1.(f) à $x = \theta$ et en multipliant par 3×2^n, on obtient

$$\boxed{9 \times 2^n \frac{a_n}{2+b_n} < \pi < 2^n\left(2a_n + \frac{a_n}{b_n}\right)}$$

(c) On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\pi}{3 \times 2^n} = 0$ d'où

$$a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{3 \times 2^n} \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} b_n = 1$$

Ainsi

$$9 \times 2^n \frac{a_n}{2+b_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \pi \quad \text{et } 2^n a_n\left(2 + \frac{1}{b_n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \pi$$

On en déduit

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} 9 \times 2^n \frac{a_n}{2+b_n} = \pi \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} 2^n\left(2a_n + \frac{a_n}{b_n}\right) = \pi}$$

Cet exercice présente la méthode développée au 17-ème siècle par Snellius et Huygens pour calculer des valeurs approchées de π. Cette méthode convergeant plus rapidement que les précédentes méthodes elle permettait d'obtenir plus facilement un grand nombre de décimales de π : le précédent record de 35 décimales avait été obtenu en considérant le périmètre d'un polygone à $2^{62} \simeq 4.6 \times 10^{18}$ cotés ; Huygens obtint 34 décimales correctes en considérant $n = 30$ (donc un polygone à 2^30 cotés).